Borcherds products and Algebraic Geometry (Representations of noncomutative algebraic systems and harmonic analysis)

金銅, 誠之

数理解析研究所講究録 1294 巻 2002 年 121-128

Borcherds products and Algebraic Geometry

名古屋大学· 多元数理科学研究科　金銅　誠之(Shigeyuki Kondo)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

§0. はじめに

Borcherds は Generalized Kac-Moody Lie algebra の Denominator formula の類似としてIV型有界対称領域上の無限積表示を持つ保型形式でその零点と極が分かるものの構成方法を与えた ([B2],[B3],[B4])。この講演では、Borcherds の保型形式の代数幾何学への一つの応用を紹介する。一言でいえば、レベル付きのエンリケス曲面のモジュライ空間の射影モデルを保型形式を用いて構成する事である ([K])。これらは楕円曲線やアーベル多様体の場合のテータコンスタントを用いたモジュライ空間の射影モデルの構成の類似であると考えられる。IV型有界対称領域の場合、一般論から、十分たくさん保型形式が存在することは知られていたが、具体的なことはよくわかっていなかった。Borcherds の保型形式は零点が具体的に分かり、このことから興味深いと思われる例ができるというお話である。アイデアは、3次曲面のモジュライの場合の Allcock, Freitag 氏 [AF] による方法から来ている。

§1. Borcherds Products

L を lattice とする。すなわち $L \simeq \mathbf{Z}^{n+2}$ で非退化な2次形式

$$(,) : L \times L \to \mathbf{Z}$$

が与えられているとする。その符号は $(2, n)$ と仮定する。このとき

$$\mathcal{D} = \{\omega \in \mathbf{P}(L \otimes \mathbf{C}) : (\omega, \bar{\omega}) > 0, (\omega, \omega) = 0\}$$

と置くと、$\mathcal{D}$ は n 次元IV型有界対称領域の2つのコピーの disjoint union となる。Γ を直交群 $O(L)$ の指数有限の部分群とする。われわれの研究対象は $\mathcal{D}/\Gamma$ である。

Borcherds は cusps で極を持つ modular form f に対し、ある IV型有界対称領域上の保型形式 Ψ で, Ψ の零点や極の位置が f の極の情報から分かるものを構成した。

Example (fake monster Lie algebra の分母公式に対応する保型形式)

L として

$$L = U \oplus U \oplus \Lambda$$

を取る。ここで U は hyperbolic lattice, すなわち行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義される階数 2 の符号が $(1,1)$ の lattice, Λ は Leech lattice と呼ばれる階数２４の負定値の特別な lattice とする。$L = U \oplus M, \quad M = U \oplus \Lambda$ と置き、L の元を (m,n,k,l,λ) と表す。ただし $(m,n) \in U$ で $(k,l,\lambda) \in M$, $\lambda \in \Lambda$,

$$(m,n)^2 = 2mn, \quad (k,l)^2 = 2kl$$

でノルムが与えられているとする。このとき

$$\mathcal{D} \subset \{(1, -(v,v)/2, v) : v \in M \otimes \mathbf{C}\}$$

と考える事ができる。一方 $H^+ = \{\tau \in \mathbf{C} : Im(\tau) > 0\}$, $q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ とおき、

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n>0} (1 - q^n)^{24} = \sum \tau(n) q^n$$

$$f = 1/\Delta(\tau) = \sum c(n) q^n = q^{-1} + 24 + 324q + \cdots$$

を考える。f は weight -12 で cusp で 1 位の極を持つ $SL(2,\mathbf{Z})$ に関する modular form である。-12 は L の符号の半分であることを注意しておく。

この f に対し、

$$\Psi = e^{2\pi\sqrt{-1}(v,\rho)} \prod_{r>0} (1 - e^{2\pi\sqrt{-1}(v,r)})^{c((r,r)/2)}$$

$$= \sum_{w \in W, n>0} det(w) \tau(n) e^{2\pi\sqrt{-1}(v, w(n\rho))}$$

が、対応する保型形式である。ここで W は lattice $M = U \oplus \Lambda$ の鏡映群で、今の場合、(-2)-vectors に附随した鏡映で生成される。また $\rho = (1,0,0) \in M$ は Weyl vector である。Lie algebra の simple roots は

$$\{r \in M : r^2 = -2, (r,\rho) = 1\} \quad \cup \quad \{n\rho : n > 0\}$$

で、Ψ の左辺の r は positive roots を走る。左辺の無限積表示は $(v,r)=0$ なる $v\in\mathcal{D}$ では意味をなさないが、これは $r^2<0$ の場合のみ起こり得る。さらに、この場合、$c((r,r)/2)\neq 0$ であるのは $r^2=-2$ の場合だけである事を注意しておく。この Ψ の式で v を忘れたものが Fake Monster Lie algebra の分母公式である（Borcherds [B1]）。保型形式と考えた時、Ψ の右辺は cusp $(1,0,0,0,0)$ における Fourier 展開である。Ψ は holomorphic automorphic form で weight は $c(0)/2=12$ であり、その零点集合は重複度も込めて

$$\mathcal{H}=\sum_r H_r$$

である。ただし

$$H_r=\{\omega\in\mathcal{D}:(\omega,r)=0\}$$

で r は L の全ての (-2)-vector を動くとものとする。

Borcherds は [B2] で上の保型形式を構成したが、保型性は $O(L)$ の各生成元に対し直接証明する方法であった。その後、Harvey-Moore が上の対応がテータ対応 (Howe correspondence) であることを指摘したが、このアイデアをもとに [B4] でより一般の構成方法の定式化を行った。今の場合、dual pair $(SL_2(\mathbf{R}),\ O_{2,n}(\mathbf{R}))$ を用いるもので、lattice L のテータ関数 $\theta(\tau,v)$ にたいし

$$\Phi(v)=\int_{H^+/SL(2,\mathbf{Z})}f(\tau)\bar{\theta}(\tau,v)dxdy/y,\quad \tau=x+\sqrt{-1}y$$

とするとき、

$$\Phi=log\mid\Psi\mid+\quad\text{elementary}\quad\text{term}$$

で Ψ が得られる。ただしこの Φ の定義は形式的なもので regularization が必要であり、正確なことは [B4] を参照して下さい。

上の例は lattice L が unimodular（$L^*=Hom(L,\mathbf{Z})\simeq L$ の時、L は unimodular という）である。一般の場合、

$$A_L=L^*/L$$

と置き、f の代わりに、vector-valued modular form

$$f=\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{C}[A_L]}:H^+\to\mathbf{C}[A_L]$$

を考え、それに対し保型形式が対応する。

Remark. 上の例の場合、$\mathcal{D}$ を周期領域にする代数多様体が存在するか否かは知られていない。もし存在すれば、表現論、保型形式論、さらには有限単純群論とも関係し興味深い対象と思われる。

§2. エンリケス曲面のモジュライの射影モデル

アーベル多様体以外で周期領域が有界対称領域となるものとして K3曲面、エンリケス曲面があげられる。エンリケス曲面の場合は堀川氏[H] がこれを証明した。ここでは幾何学的なことは省略し、保型形式を用いた応用のみを紹介する。Borcherds が彼自身の結果を用いて [B3] でエンリケス曲面のモジュライ空間が quasi-affine であることを示したのが、最初の応用であることは注意しておく。

まず考える lattice は

$$N = U \oplus U(2) \oplus E_8(2)$$

である。ここで E_8 は負定値の E_8 型 Cartan 行列で定まる lattice、$U(2), E_8(2)$ は bilinear form をその 2 倍で置き換えたlattice とする。

$$\mathcal{D} = \{\omega \in \mathbf{P}(N \otimes \mathbf{C}) : (\omega, \bar{\omega}) > 0, (\omega, \omega) = 0\}$$

と置き、$r \in N$ で $r^2 = -2$ のものに対し

$$H_r = \{\omega \in \mathcal{D} : (\omega, r) = 0\}, \quad \mathcal{H} = \bigcup H_r$$

と置く。ただし r は N の全ての (-2)-vector を動くとする。このとき $\mathcal{D} \setminus \mathcal{H}$ がエンリケス曲面の周期領域で、$(\mathcal{D} \setminus \mathcal{H})/O(N)$ がエンリケス曲面のモジュライ空間であり、それは１０次元 quasi-projective variety である。

$A_N = N^*/N \simeq (\mathbf{F}_2)^{10}$ であり、

$$q_N : A_N \to \mathbf{F}_2$$

$$b_N : A_N \times A_N \to \mathbf{F}_2$$

を $q_N(x) = (x, x) \bmod 2$, $b_N(x, y) = 2(x, y) \bmod 2$ で定義すると、A_N は $\mathbf{F}_2$ 上の 2 次形式空間となる。$O(A_N)$ をその直交群とする。

$$\Gamma = Ker\{O(N) \to O(A_N)\}$$

とすると $(\mathcal{D}\setminus\mathcal{H})/\Gamma$ はレベル２構造付きエンリケス曲面のモジュライ空間と考える事ができる。ここでの主結果は次の通りである。

THEOREM

$O(A_L)$-equivariant な正則写像

$$\psi : \mathcal{D}/\Gamma \to \mathbf{P}^{185}$$

で、その像の上に双有理であるものが存在する。さらに、像は $2^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 31$ 個の４次の関係式を満たす。ここで１８６は $O(A_N)$ のある既約表現の次数であることを注意しておく。

以下、この写像の構成方法と正則であることの証明を紹介する。そのためにまず、$SL(2,\mathbf{Z})$ の群環 $\mathbf{C}[A_N]$ への作用を

$$\rho(T)e_\alpha = e^{\pi\sqrt{-1}q_N(\alpha)}e_\alpha$$

$$\rho(S)e_\alpha = \frac{1}{\sqrt{|A_N|}}\sum_{\beta\in A_N} e^{2\pi\sqrt{-1}b_N(\alpha,\beta)}e_\beta$$

と定める。ただし $\alpha\in A_N$ に対し、対応する群環の生成元を e_α と置いた。また

$$T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

である。$SL(2,\mathbf{Z})$ の作用は $SL(2,\mathbf{F}_2)\simeq S_3$ の作用を経由しており、従って簡単な計算から $SL(2,\mathbf{Z})$ 不変な部分空間は１８７次元であることが分かる。$SL(2,\mathbf{Z})$ の作用と、$O(A_N)$ の $\mathbf{C}[A_N]$ への自然な作用は可換であり、$O(A_N)$ は $\mathbf{C}[A_N]^{SL(2,\mathbf{Z})}$ に作用するが、この作用は１次元の自明なものと、１８６次元の既約なものの直和であることが示される。

一方、$\mathbf{C}[A_N]^{SL(2,\mathbf{Z})}$ は vector-valuded な weight 0 の modular form に他ならず、Gritsenko-Borcherds の lifting ([B4], Theorem 14.3) により, $\mathcal{D}$ 上の Γ に関する weight $4(=(10-2)/2)$ の保型形式の空間で $O(A_N)$ が既約に作用する１８６次元のものが得られる。しかもこの対応は $O(A_N)$-equivariant でもある。このようにして”写像”

$$\psi : \mathcal{D}/\Gamma \to \mathbf{P}^{185}$$

が得られたが、これが正則であることを §1 で述べた Borcherds の理論を用いて示す点が、この話のポイントである。そのために、まず A_N の non-isotropic な元 α に対し transvection

$$t_\alpha; x \to x + b_N(x,\alpha)\alpha$$

を考える。これは $r \in N$ で $r/2 \bmod N = \alpha$ なる (-4)-vector r に附随した鏡映

$$s_r : v \to v + (v,r)r/2$$

が引き起こす A_N の変換に他ならない事に注意する。いま、互いに直交する 5 つの non-isotropic vectors で生成される A_N の 5 次元部分空間 V を一つ取る。V の maximal totally isotropic subspace W は 4 次元で、W を含む A_N の maximal totally isotropic subspaces はちょうど 2 つ W^+, W^- 存在する。

$$f_V = \sum_{\alpha \in W^+} e_\alpha - \sum_{\alpha \in W^-} e_\alpha$$

と置くと、$f_V \in \mathbf{C}[A_N]^{SL(2,\mathbf{Z})}$ 、且つ

$$t_\alpha(f_V) = -f_V, \quad \alpha \in V$$

が分かる。f_V の lifting として得られる weight 4 の保型形式を F_V とする。この対応が $O(A_N)$-equivariant であることと、上に述べた transvection と鏡映との関係から

$$F_V(s_r(v)) = -F_V(v)$$

が従う。ただし $r \in N, \quad r^2 = -4, \quad r/2 \bmod N \in V$ である。よって F_V の零因子 (F_V) は

$$\mathcal{D}(V) = \sum_{\alpha \in V, q_N(\alpha)=1} \mathcal{H}_\alpha$$

を含むことが分かる。ただし

$$\mathcal{H}_\alpha = \sum_{r \in N, r^2=-4, r/2 mod N = \alpha} H_r, \quad H_r = \{v \in \mathcal{D} : (v,r) = 0\}$$

であった。

一方、§1 で述べた、Borcherds の方法を次の vector-valued modular form

$f_\alpha(\tau) =$

$$\begin{cases} 248\eta(2\tau)^8/\eta(\tau)^{16} = 248 + 3968q + 35712q^2 + \cdots, & \text{if } \alpha = 0; \\ -8\eta(2\tau)^8/\eta(\tau)^{16} = -8 - 128q - 1152q^2 - \cdots, & \text{if } q_N(\alpha) = 0; \\ 8\eta(2\tau)^8/\eta(\tau)^{16} + \eta(\tau/2)^8/\eta(\tau)^{16} = q^{-1/2} + 36q^{1/2} + \cdots, & \text{if } q_N(\alpha) = 1. \end{cases}$$

に適応すると weight $124 = 248/2 = 2^2 \cdot 31$ の保型形式 Ψ でその零因子が

$$(\Psi) = \sum_{\alpha \in A_N, q_N(\alpha)=1} \mathcal{H}_\alpha$$

で与えられるものの存在が従う。A_N の部分空間 V の個数は $3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31$ であり、各 V に含まれる non-isotropic vectors の個数は 2^4, A_N に含まれる non-isotropic vectors の個数は $2^4(2^5-1) = 2^4 \cdot 31$ であることから、

$$\prod_V F_V / \Phi^{3^3 \cdot 5 \cdot 17}$$

は weight 0 の正則な保型形式であることが容易に分かり、従って Koecher principle より定数となる。このことから

$$(F_V) = \mathcal{D}(V)$$

が従う。あとは A_V の有限幾何を用いて

$$\bigcap_V \mathcal{D}(V) = \emptyset$$

を示す事ができ、結局

$$\psi : \mathcal{D}/\Gamma \to \mathbf{P}^{185}$$

が正則写像であることが分かる。双有理性および4次の関係式については、本論の主題とは直接関係はないので省略するが、興味のある方は [K] を御覧下さい。

Reference

[AF] D. Allcock, E. Freitag, *Cubic surfaces and Borcherds product*, Comm. Math. Helv. (to appear), math.AG/0002066.

[B1] R. Borcherds, *The monster Lie algebra*, Adv. Math., **83**(1990), 30–47.

[B2] R. Borcherds, *Automorphic forms on* $O_{s+2,2}(\mathbf{R})$ *and infinite products*, Invent. math., **120**(1995), 161–213.

[B3] R. Borcherds, *The moduli space of Enriques surfaces and the fake monster Lie superalgebra*, Topology **35** (1996), 699–710.

[B4] R. Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. math., **132** (1998), 491–562.

[FH] E. Freitag, C.F. Hermann, *Some modular varieties of low dimension*, Adv. Math., **152** (2000), 203–287.

[H] E. Horikawa, *On the periods of Enriques surfaces* I, II, Math. Ann., **234** (1978), 78–108, ibid **235** (1978), 217–246.

[K] S. Kondo, *The moduli space of Enriques surfaces and the Borcherds products*, J. Algebraic Geometry **11** (2002), 601–627.